



## آزمون ۲۴ دی ماه ۹۵ پیش دانشگاهی ریاضی

### طراحان به ترتیب حروف الفبا

نام طراحان	نام درس	اختصاصی
محمد مصطفی ابراهیمی - کاظم اجلائی - جواد اسحاقی - فریدون ساعتی - حبیب شفیعی - محمدرضا شوکتی بیرق حمید علیزاده - ایمان نخستین - رضا نیازی - علی یوسفی	دیفرانسیل	
کیوان دارابی - علیرضا سیف - علیرضا شریف خطیبی - محمداطاهر شعاعی - محمد ابراهیم گیتی زاده - نوید مجیدی محسن محمد کریمی	هندسه تحلیلی	
امیر حسین ابومحبوب - علی ایمانی - محمدرضا حسینی فرد - حسین خزایی - کیوان دارابی - سید محسن فاطمی - نوید مجیدی محمدعلی نادرپور - هومن نورائی	ریاضیات گسسته	
خسرو ارغوانی فرد - محمد اسدی - بابک اسلامی - اسماعیل امام - امیر حسین برادران - سید ابوالفضل خالقی - ناصر خوارزمی فرشید رسولی - کاظم شاهملکی - محمدعلی عبادی - روح اله علی پور - نجمه علی پور کفشگر - بهادر کامران - مصطفی کیانی غلامرضا محبی - فاروق مردانی - سیدعلی میرنوری - محمد نادری - نیما نوروزی - علیرضا یارمحمدی	فیزیک	
اکبر ابراهیم نتاج - حامد پویان نظر - مسعود جعفری - نیما حسن زاده - مرتضی خوش کیش - حسن دهری - مصطفی رستم آبادی حسین سلیمی - محمد عظیمیان زواره - روح الله علیزاده - حسن عیسی زاده - مهدی فائق - علی فرزاد تبار - محمد جواد فولادی امیر قاسمی - بابک محب - فرزاد نجفی کرمی - عبدالرشید یلمه	شیمی	

### گزینشگران و ویراستاران

نام درس	دیفرانسیل	هندسه تحلیلی	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلائی	علی سعیدی زاد	حسین خزایی	روح اله علی پور	مسعود جعفری
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی حمید زرین کفش مرضیه گودرزی محمد طیب زاده	علی ارجمند مرضیه گودرزی هادی پلاور	علی ارجمند مرضیه گودرزی هادی پلاور	عرفان مختارپور ایمان چینی فروشان امیر حسین برادران حمید زرین کفش	امیر حسین معروفی علی حسینی صفت الهام شفیعی مسعود علوی امامی حسین احمدزاده عرفان محمودی
مسئول درس	هادی پلاور	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین ابومحبوب	بابک اسلامی	سهند راحمی پور
بازبینی نهایی	سینا اکبری	سینا اکبری	سینا اکبری	_____	_____

### گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری (اختصاصی)
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده (اختصاصی)
گروه مستندسازی	مدیر گروه: مریم صالحی مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری (اختصاصی)
حروف نگار	ندا اشرفی
ناظر چاپ	حمید محمدی

### گروه آزمون

### بنیاد علمی آموزشی قلم چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳

دیفرانسیل

-۱۰۱

(فریدون ساعتی)

$\alpha$  عدد گنگی است. بنابراین  $2 + 3\alpha$  حتماً گنگ و جذر آن نیز گنگ است. (گنگ = گویا + گنگ). در ضمن اگر عددی گنگ باشد، وارون آن نیز گنگ است. پس گزینه‌ی ۲ همواره گنگ است.

گزینه‌ی «۳» نیز گنگ است. زیرا با استفاده از برهان خلف داریم:

$$\frac{\alpha-1}{2\alpha+3} \notin Q' \Rightarrow \frac{\alpha-1}{2\alpha+3} = x, x \in Q \Rightarrow 2\alpha x + 3x = \alpha - 1$$

$$\alpha(2x-1) = -3x-1 \Rightarrow \alpha = \frac{-3x-1}{2x-1}$$

چون  $x$  گویا است، پس  $\frac{-3x-1}{2x-1}$  گویا هست. پس  $\alpha$  نیز گویاست که خلاف فرض

$\alpha \in Q'$  می‌باشد. پس  $\frac{\alpha-1}{2\alpha+3}$  همواره گنگ است.

گزینه‌ی «۴» می‌تواند گویا باشد. زیرا  $\alpha^2 + 4\alpha$  را می‌توان یک عدد گویا فرض کرد که جواب‌های معادله‌ی حاصل اعداد گنگ باشند.

$$\alpha^2 + 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2 \pm \sqrt{5}$$

که  $-2 + \sqrt{5}$  و  $-2 - \sqrt{5}$  اعداد گنگ‌اند.

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌ی ۸)

-۱۰۲

(عبیب شفیعی)

نامعادله‌ی  $3 - |2x-1| > 3$  به ازای تمام اعداد حقیقی برقرار است. پس

$$|2x-3| < 2 \Rightarrow |x - \frac{3}{2}| < 1 \Rightarrow r = 1, A \cap B = B$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۶)

-۱۰۳

(مهم‌رضا شوکتی بیرق)

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}}$$

با افزایش  $n$ ، کسر  $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$  کاهش و کسر  $-\frac{1}{1+\sqrt{n}}$  افزایش و عبارت

$$1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

داده شده، صعودی است. از طرفی حد دنباله، برابر ۱ است. پس دنباله، همگرا و در نتیجه، کران‌دار می‌باشد.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

-۱۰۴

(عبیب شفیعی)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \tan^{-1}(-n)}{\pi n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \tan^{-1}(-n)}{\pi}$$

$$= \frac{2(-\frac{\pi}{2})}{\pi} = -1$$

با توجه به تعریف زیر دنباله اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . آن‌گاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$  و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + a_{n+1} + 2a_n) = -1 - 1 - 2 = -4$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ و ۳۷ تا ۴۸ تا ۵۰)

-۱۰۵

(عبیب شفیعی)

$$\text{گزینه‌ی «۱» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

$$\text{گزینه‌ی «۲» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5n+1} - \sqrt{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5n} - \sqrt{3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{n}) = +\infty$$

$$\text{گزینه‌ی «۳» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 5n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{2n} = \frac{5}{2}$$

$$\text{گزینه‌ی «۴» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

-۱۰۶

(فریدون ساعتی)

$$a_n = n^2 (\ln(n^2 + 2) - \ln n^2) = n^2 (\ln(\frac{n^2 + 2}{n^2}))$$

$$= \ln(\frac{n^2 + 2}{n^2})^{n^2} = \ln(1 + \frac{2}{n^2})^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{2}{n^2})^{n^2} \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^{bn} = e^{ab}}$$

$$= \ln(\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{n^2})^{n^2}) = \ln e^2 = 2 \ln e = 2$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

(رضا نیازی)

-۱۱۰

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos^3 x} = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^-} = \infty - \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos^3 x + \cos x}{\cos x \cos^3 x} \stackrel{\text{جمع به ضرب}}{=} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2(\cos^2 x \cos x)}{\cos x \cos^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

نکته: در رفع ابهام  $\infty - \infty$  توابع کسری از مخرج مشترک‌گیری استفاده می‌کنیم.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

(کاظم اجلالی)

-۱۱۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot\left(\frac{\tan^{-1} x}{x}\right) = \cot\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}\right) = \cot(0^+) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cot\left(\frac{\tan^{-1} x}{x}\right) = \cot\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}\right) = \cot(0^+) = +\infty$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

(علی یوسفی)

-۱۱۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+ax+b} = +\infty$$

چون حد صورت برابر ۳ است، برای اینکه حاصل حد  $+\infty$  باشد، باید  $x=1$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = (x-1)^2 \quad \text{ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد.}$$

$$x^2 + ax + b = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = -2, \quad b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{9}{2}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۸)

(ایمان نشتین)

-۱۱۳

نقطه‌ی مفروض به‌طول صحیح  $n$  را در نظر می‌گیریم و شرط داشتن حد را برای آن فراهم می‌سازیم.

$$\Rightarrow n \text{ فرد باشد.} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) \stackrel{\text{فرد}}{=} \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{2x^2 - 1}{x} = 2n^2 - 1 \\ \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \stackrel{\text{زوج}}{=} \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{3x - 2}{x} = 3n - 2 \end{cases}$$

(مییب شفیعی)

-۱۰۷

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 2n} \times \frac{n + \sqrt{n^2 - 2n}}{n + \sqrt{n^2 - 2n}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 + 2n}{n + \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{2n}{2n} = 2$$

دقت کنید که  $n + \sqrt{n^2 - 2n} < 2n$  بنابراین  $\sqrt{n^2 - 2n} < \sqrt{n^2} = n$

پس دنباله‌ی مخرج یعنی  $n + \sqrt{n^2 - 2n}$  از  $2n$  کوچکتر است. پس دنباله‌ی

$a_n$  با مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ میل می‌کند. پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x \left[ \frac{2}{x} \right] = 2 \times \left[ \frac{2}{2^+} \right] = 2 \times [1^-]$$

$$= 2 \times 0 = 0$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

(علی یوسفی)

-۱۰۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{fof}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{fof}\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \text{fof}(1^-)$$

$$= f(f(1^-)) = f(1^+) = -1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

(فریرون ساعتی)

-۱۰۹

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( g(x) - \frac{\tan \pi x}{1-x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{1-x}$$

$$\left( \begin{matrix} 1-x=t \Rightarrow x=1-t \\ (x \rightarrow 1) \Rightarrow (t \rightarrow 0) \end{matrix} \right) \quad \text{با تغییر متغیر } 1-x=t \text{ داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi(1-t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi - \pi t)}{t}$$

$$= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{-\pi t}{t} = -\pi$$

$$\frac{\text{طبق قضیه‌ی فشرده‌گی}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = -\pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-\pi f(x) + \pi) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + \pi f(x)) = \pi - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\pi - 1}{\pi + 1}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۶ و ۷۷ و ۸۲ و ۸۳)

(مهم‌مصطفی ابراهیمی)

-۱۱۶

با توجه به این که  $f$  بر بازه‌ی داده شده پیوسته و وارون‌پذیر است، بنابراین در این بازه لزوماً اکیداً یکنواست. با توجه به این که  $f(5) = -1 < f(-2) = 4$  بنابراین در بازه‌ی  $[-2, 5]$  تابع  $f$  اکیداً نزولی است. می‌دانیم اگر تابع پیوسته  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$  نزولی اکید و پیوسته باشد، آن‌گاه  $f^{-1}$  در بازه‌ی  $[f(b), f(a)]$  نزولی اکید و پیوسته خواهد بود. پس وارون تابع  $f$  در بازه‌ی  $[f(5), f(-2)] = [-1, 4]$  اکیداً نزولی و پیوسته است.

(ریفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

(نظم ابلالی)

-۱۱۷

تابع  $g(x) = f(x) - \cos \frac{\pi}{x}$  را در نظر می‌گیریم. جدول مقادیر تابع به شکل روبه‌روست:

	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	$g(\frac{1}{3})g(\frac{1}{2}) < 0$
$x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	$g(\frac{1}{3})g(1) < 0$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	-۲	۳	$-\frac{1}{2}$	$g(1)g(\frac{3}{2}) < 0$

از آن‌جا که تابع  $g$  پیوسته است، پس تابع  $g$  در هر کدام از بازه‌های  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ؛  $(\frac{1}{2}, 1)$ ؛  $(1, \frac{3}{2})$  و  $(\frac{3}{2}, 1)$  حداقل یک ریشه دارد. پس  $g$  در بازه‌ی  $(0, 2)$  حداقل ۳ ریشه دارد. در نتیجه  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$  حداقل ۳ جواب دارد.

(ریفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

(رضا نیازی)

-۱۱۸

$$x^3 + ax = 0$$

غ ق ق  $\Rightarrow$  فقط یک ریشه  $a \geq 0 : x = 0$   
مخرج سه ریشه دارد.  $a < 0 : x = 0, x = \pm\sqrt{-a}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$a = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

(ریفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

$$\Rightarrow 2n^2 - 1 = 3n - 2 \Rightarrow 2n^2 - 3n + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$n \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) \stackrel{\text{زوج}}{=} n \lim_{x \rightarrow n^+} 3x - 2 = 3n - 2 \\ \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \stackrel{\text{فرد}}{=} n - 1 \lim_{x \rightarrow n^-} (2x^2 - 1) = 2n^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 1 = 3n - 2 \Rightarrow 2n^2 - 3n + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \text{ زوج نیست} \\ n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس این تابع در  $x = 1$  حد دارد.

(ریفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۶۴)

(عیب شفیع)

-۱۱۴

با فرض  $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته و  $g$  ناپیوسته باشد، توابع  $f \pm g$  و  $\frac{f}{g}$  ( $f(a) \neq 0$ ) در  $a$  ناپیوسته ولی توابع  $\frac{g}{f}$  و  $f \times g$  ممکن است پیوسته یا ناپیوسته باشد، پس گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مثال نقض گزینه‌ی «۱»،  $f = [x + \frac{1}{x}]$  و  $g = x - \frac{1}{x}$  در  $x = 1$  پیوسته‌اند ولی  $fog$  در  $x = 1$  پیوسته نیست.

مثال نقض گزینه‌ی «۲»، اگر  $f(x) = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$ ،  $fog$  در صفر پیوسته است ولی  $f$  و  $g$  در صفر پیوسته نیستند.

مثال نقض گزینه‌ی «۴»،  $f = x - 2$  در  $x = 2$  پیوسته و  $g(x) = [x]$  ناپیوسته اما  $\frac{f}{g}$  پیوسته است.

(ریفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۶)

(عمیر علیزاده)

-۱۱۵

$$f(x) = (x^2 + 1)[2\sqrt{x}]$$

$$k < x < 8 \Rightarrow \sqrt{k} < \sqrt{x} < \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{k} < 2\sqrt{x} < 4\sqrt{2}$$

بین  $2\sqrt{k}$  و  $4\sqrt{2}$  باید دو عدد صحیح داشته باشیم تا دو نقطه ناپیوستگی ایجاد شود بنابراین کمترین مقدار  $2\sqrt{k}$  برابر ۳ می‌باشد.

$$2\sqrt{k} = 3 \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{9}{4} = 2 \frac{1}{4}$$

(ریفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌ی ۱۰۰)

(سراسری ریاضی - ۷۶)

-۱۲۳

در دنباله‌ی  $\{a_n\}$  با شرط  $a_1 = 1$  و  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$  جملات متوالی آن

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

چنین‌اند:

اولاً با روش استقرای ریاضی برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:  $a_n < 2$

زیرا:  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < 2$

$$a_k < 2 \rightarrow a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{2 \times 2} = 2$$

پس دنباله کران‌دار است.

ثانیاً اعداد دنباله به ترتیب بزرگ می‌شوند:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

پس  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  و دنباله صعودی است. در نتیجه دنباله‌ی  $\{a_n\}$  صعودی و

کران‌دار، یعنی همگراست.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۴۱)

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

-۱۲۴

به‌طور غیر رسمی وقتی  $X \rightarrow 0^+$  به جای  $X$ ، در تابع  $0^+$  قرار می‌دهیم، به طریق

مشابه وقتی  $X \rightarrow 0^-$  به جای  $X$ ، در تابع  $0^-$  قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] + \operatorname{sgn} x)$$

$$= [0^+] + \operatorname{sgn}(0^+) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + \operatorname{sgn} x)$$

$$= [0^-] + \operatorname{sgn}(0^-) = -1 - 1 = -2$$

$-2 = (1) - (2) = -2$  حاصل ضرب حد چپ و راست

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۴)

(سراسری تئوری - ۷۸)

-۱۲۵

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} \quad \left( \begin{array}{l} \text{حد ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد.} \\ \text{حد ابهام } \frac{0}{0} \end{array} \right)$$

صورت و مخرج را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - (\sqrt{5x + 16})} \times \frac{1 + \sqrt{5x + 16}}{1 + \sqrt{5x + 16}}$$

(یوار اسماقی)

-۱۱۹

مجاذب افقی تابع  $y = 1$  است، چون  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  است.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

حال باید حد تابع را در  $+\infty$  و  $-\infty$  محاسبه کنیم:

$$I) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{1}{x} = u} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که  $u \rightarrow 0^+$  باشد،  $\tan u > u$  است، پس عبارت از یک بیشتر است.

$$II) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{1}{x} = u} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که  $u \rightarrow 0^-$  باشد،  $\tan u < u$  است، پس:

$$\tan u < u \xrightarrow{+u} \frac{\tan u}{u} > 1$$

از طرفی تابع از یک بیشتر است. پس تابع در  $\pm\infty$  با مقادیر بیشتر از یک به آن نزدیک می‌شود.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۴)

(یوار اسماقی)

-۱۲۰

وقتی مجانب مایل با خطی موازی است، یعنی شیب مجانب مایل با شیب خط برابر

است. شیب مجانب مایل هم که از رابطه‌ی  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  به دست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)\sqrt{ax+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x\sqrt{a}}{x} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{a} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{9}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

دیفرانسیل - آزمون شاهد (گواه)

(آزمون کانون ریاضی - ۸۷)

-۱۲۱

$$0. / 5243 = A \rightarrow 1.0A = 5 + 0. / 243 \rightarrow 1.0A - 5 = 0. / 243$$

$$1.0A - 5 = \frac{243}{999} = \frac{27}{111} \rightarrow \frac{1}{1.0A - 5} = \frac{111}{27} \Rightarrow \frac{9}{1.0A - 5} = \frac{111}{3} = 37$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

(آزمون کانون ریاضی - ۸۸)

-۱۲۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} = 0$$

بنابراین باید  $|\frac{1}{1.0.}| < |a_n - 0|$  باشد، پس:

$$\left| \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \right| < \frac{1}{1.0.} \Rightarrow \frac{n}{n^2 + 1} < \frac{1}{1.0.} \Rightarrow \frac{n^2 + 1}{n} > 1.0.$$

$$\Rightarrow n + \frac{1}{n} > 1.0. \Rightarrow n \geq 1.0.$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

ضابطه‌ی پایین چند جمله‌ای است. پس در دامنه‌ی خود پیوسته است. برای آن که تابع روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد کافی است در مرز ناحیه‌ها یعنی  $x = 1$  و  $x = -1$  پیوسته باشد.  
در  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b = f(1)$$

در  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (ax + b) = -a + b = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 2$$

$$\Rightarrow -a + b = 2 \quad (2)$$

از حل (۱) و (۲) با هم خواهیم داشت:

$$b = 2 \text{ و } a = 0 \Rightarrow (a, b) = (0, 2)$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۱۲۹ - (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

می‌دانیم تابع  $[x]$  در نقاط صحیح ناپیوسته است، لذا برای بررسی پیوستگی این تابع، باید پیوستگی تابع را در سه نقطه‌ی ۳، ۴ و ۵ بررسی کنیم. به عنوان مثال در  $x = 3$  داریم:

$$f(3) = \sin(3 - [3])\pi = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(3^+ - [3^+])\pi = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sin(x - [x])\pi = \sin(3^- - [3^-])\pi = \sin\pi = 0$$

تابع در نقطه‌ای به طول ۳ پیوسته است. برای هر نقطه‌ی  $x$  که عددی صحیح باشد نیز تابع پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع در بازه‌ی  $(2, 6)$  پیوسته است.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲ و ۱۰۰)

۱۳۰ - (آراز ریاضی - ۸۲)

$x = 0$  ریشه‌ی مخرج است، بنابراین باید حد تابع را در  $x = 0$  بررسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x}$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۷)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)}{-5(x+3)} \times \frac{1 + \sqrt{5x+16}}{1} = 2$$

$$\frac{a}{-5} \times 2 = 2 \Rightarrow a = -5$$

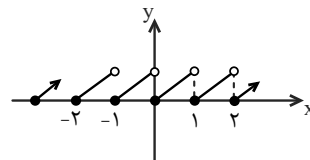
(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۹ تا ۸۶)

۱۲۶ - (کتاب آبی - سوال ۱۳۸۴)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( 1 - x \left[ \frac{1}{x} \right] \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right] \right)$$

با فرض  $\frac{1}{x} = t$  خواهیم داشت:

$$= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (t - [t])$$



با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = x - [x]$  از آنجایی که این تابع متناوب است، لذا وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  حد وجود ندارد.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌ی ۸۶ - تمرین ۷)

۱۲۷ - (کتاب آبی - سوال ۱۳۳۷)

با استفاده از دستور  $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$  خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$$

گویا شده‌ی کسر  $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$  به صورت  $\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$  است. چون حد این کسر وقتی  $x \rightarrow +\infty$  برابر صفر است، پس حد سینوس آن نیز صفر بوده و چون عبارت  $\cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$  کران‌دار است، پس حاصل حد برابر صفر است.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌ی ۱۳۰ - تمرین ۳)

۱۲۸ - (سراسری ریاضی - ۸۰)

تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ ax + b & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ضابطه‌ی بالا فقط می‌تواند در  $x = 0$  ناپیوسته باشد که  $x = 0$  متعلق به دامنه‌ی آن نیست، پس تابع ضابطه‌ی بالا در دامنه‌ی خود پیوسته است، هم‌چنین تابع



## هندسه تحلیلی

-۱۳۱

(نویس میبری)

نقطه‌ی مجهول را برابر با  $M(x, y, z)$  می‌گیریم، حال باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \overline{AM} = (x-2, y, z+1) \\ \overline{BM} = (x-1, y-1, z+2) \end{cases} \quad \xrightarrow{3\overline{AM} = 4\overline{BM}}$$

$$(3x-6, 3y, 3z+3) = (4x-4, 4y-4, 4z+8)$$

$$\rightarrow (x, y, z) = (-2, 4, -5)$$

$$\begin{cases} \overline{AM} = (-4, 4, -4) \\ \overline{BM} = (-3, 3, -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\overline{AM}| = 4\sqrt{3} \\ |\overline{BM}| = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\overline{AM}| + |\overline{BM}| = 7\sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردار، صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

-۱۳۲

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

ابتدا  $a'$  تصویر  $a$  را نسبت به راستای  $b$  تعیین می‌کنیم.

$$a \cdot b = (3, 1, -4) \cdot (1, -1, -1) = 3 - 1 + 4 = 6$$

$$|b| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{6}{(\sqrt{3})^2} b = 2b \Rightarrow a' = 2(1, -1, -1) = (2, -2, -2)$$

سپس،  $a''$  قرینه‌ی بردار  $a$  را نسبت به راستای بردار  $b$  به دست می‌آوریم.

$$a'' = 2a' - a \Rightarrow a'' = 2(2, -2, -2) - (3, 1, -4) = (1, -5, 0)$$

$$\Rightarrow a'' = i - 5j$$

(هندسه تحلیلی - بردار، صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

-۱۳۳

(معمداً طاهر شعاعی)

قطرهای متوازی الاضلاع، بردارهای  $a+b$  و  $a-b$  هستند. بنا به فرض زاویه‌یبین آنها  $60^\circ$  است. پس:

$$\tan 60^\circ = \frac{|(a+b) \times (a-b)|}{(a+b) \cdot (a-b)}$$

$$\Rightarrow |a \times a - a \times b + b \times a - b \times b| = \sqrt{3}(|a|^2 - |b|^2)$$

$$|-2a \times b| = \sqrt{3}(|a|^2 - |b|^2) \Rightarrow |a \times b| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|a|^2 - |b|^2)$$

$$|a \times b| = \text{مساحت متوازی الاضلاع بنا شده روی } a \text{ و } b$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(|a|^2 - |b|^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(36 - 16) = 10\sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردار، صفحه‌های ۲۵ تا ۳۰)

-۱۳۴

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t - 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{معادله‌ی پارامتری خط } D \text{ به صورت } \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t - 2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ است. با در نظر گرفتن}$$

نقطه‌ی  $H$  روی این خط و با فرض این که  $H$  پای عمود رسم شده از  $A$  برخط  $D$  باشد، داریم:

$$\overline{AH} \cdot \mathbf{u}_D = 0 \Rightarrow (3t-2, t-4, 0) \cdot (3, 1, 0) = 0$$

$$\Rightarrow 9t - 6 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1$$

بنابراین تصویر  $A$  روی خط  $D$ ، نقطه‌ی  $H(2, -1, 1)$  است. با فرض این‌که $A'$  قرینه‌ی  $A$  نسبت به خط  $D$  باشد، آن‌گاه:

$$A' = 2H - A = 2(2, -1, 1) - (1, 2, 1) = (3, -4, 1)$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۱۳۵-

(علیرضا شریف‌نظیری)

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P را با D نشان دهیم، آن‌گاه داریم:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(0) + 1(0) - 2(2) - 5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$$

(هنرسه تالیلی - قط و صفحه: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۱۳۶-

(مهم‌ظاهر شعاعی)

بردار هادی خط مورد نظر،  $u = (3, -2, 1)$  و بردار هادی محور X ها،

$i = (1, 0, 0)$  است. در این صورت بردار هادی عمود مشترک این دو خط برابر

$$u' = u \times i = (0, 1, 2)$$

است با:

با در نظر گرفتن نقطه‌ی A روی خط و نقطه‌ی O (مبدأ مختصات) روی محور

X ها داریم:

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|\overline{OA} \cdot u'|}{|u'|} = \frac{|0 - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(هنرسه تالیلی - قط و صفحه: صفحه‌ی ۳۹)

۱۳۷-

(مهم‌ابراهیم کیتی‌زاده)

$$C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 17 \Rightarrow x=2, y>0 \Rightarrow (y+3)^2 = 16$$

$$y=1 \Rightarrow A(2, 1)$$

$$\Rightarrow \text{مرکز دایره} : O'(1, -3)$$

خط مماس D در نقطه A بر شعاع O'A عمود است،

$$\Rightarrow O'A \text{ شیب} : m = \frac{1+3}{2-1} = 4 \Rightarrow D \text{ شیب} = -\frac{1}{4}$$

$$D: (y-1) = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow D: x + 4y - 6 = 0$$

(هنرسه تالیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱۳۸-

(علیرضا سیف)

$$\text{مرکز} = \left( \frac{3+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (2, 1)$$

$$\text{شعاع} = \frac{1}{2} |AB| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8} = \sqrt{2}$$

$$\text{دایره معادله‌ی} : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = -3$$

(هنرسه تالیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱۳۹-

(مسئله مهم‌کریمی)

$$M \begin{vmatrix} -7 \\ 6 \end{vmatrix} \quad F \begin{vmatrix} 5 \\ 22 \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} 5 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{فاصله کانونی} = 2c = |FF'| = 25 \Rightarrow c = 12.5$$

$$|MF| = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = 20$$

$$|MF'| = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = 15$$

$$|MF| + |MF'| = 2a \Rightarrow 2a = 20 + 15 = 35 \Rightarrow a = 17.5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12.5}{17.5} = \frac{5}{7}$$

(هنرسه تالیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۱۴۰-

(کیوان دارابی)

فاصله‌ی M از کانون با فاصله‌ی M از خط هادی برابر است. بنابراین:

$$|MF| = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

حال خط هادی نیز باید از M به فاصله‌ی ۵ باشد.

در گزینه‌ی ۳، فاصله‌ی نقطه‌ی M(-1, 3) از خط  $x = -5$ ، برابر ۴ است و در

نتیجه شرط فوق برقرار نیست.

(هنرسه تالیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)



ریاضیات گسسته

۱۴۱-

(نوبت میبری)

می‌دانیم که بیش‌ترین اندازه در گراف از مرتبه‌ی  $p$  با توجه به نابرابری

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

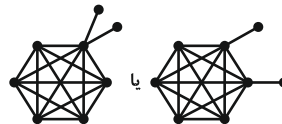
که در گراف‌های

کامل  $K_p$  پدید می‌آید. برای اینکه تعداد رأس‌های با درجه‌ی کم‌تر، بیش‌تر شود سعی می‌کنیم یک گراف کامل که اندازه‌ی آن بیش‌ترین نزدیکی را به تعداد ثابت یال‌ها داشته باشد ایجاد کنیم و سپس تکلیف رأس‌های باقی‌مانده را روشن می‌نماییم. در اینجا، بهتر است یک گراف  $K_6$  که تعداد یال‌هایش

$$\frac{6(6-1)}{2} = 15$$

است ایجاد کنیم و سپس دو رأس باقی‌مانده را به یکی از دو

شکل زیر، از درجه‌ی یک رسم نماییم:



(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱۴۲-

(مسین فزایی)

با توجه به رابطه  $\sum \deg v_i = 2q$ ، این گراف می‌تواند ۱۱ رأس از درجه‌ی

$$11 \times 3 + 1 \times 9 = 42$$

۳ و یک رأس از درجه‌ی ۹ داشته باشد.

بنابراین حداکثر مقدار  $p$ ، برابر ۱۲ است و داریم:

$$p^2 - 2q = 12^2 - 42 = 102 = 2q$$


(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۱۱، ۱۰ و ۲۱)

۱۴۳-

(هومن نورائی)

می‌دانیم گراف همبند فاقد دور، درخت است، از طرفی چون با اضافه کردن یک یال بین هر دو رأس دلخواه در این درخت، فقط دوری به طول ۳ ایجاد می‌شود.



پس این درخت به شکل  می‌باشد و در این حالت فاصله بین هر رأس درجه‌ی  $\min$  با رأس درجه‌ی  $\max$  برابر یک و فاصله‌ی بین هر ۲ رأس درجه‌ی  $\min$  برابر با ۲ است. پس ۲ مقدار متمایز برای فاصله‌ی بین رئوس پیدا می‌شود.

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱۴۴-

(سیرمسن قاطمی)

گزاره «الف»، «ج» و «د» درست هستند.

$$a|b \Rightarrow a|b^2 \Rightarrow a|b^2 + c \quad \text{(الف)}$$

$$a|b \Rightarrow a|b^2 \Rightarrow a|a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{(ج)}$$

$$a|b \Rightarrow a|a^2 | bc \Rightarrow a^2 | a^2 + bc \quad \text{(د)}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱۴۵-

(علی ایمانی)

$$a = 18k, b = 12q$$

$$a = bq' + r \Rightarrow 18k = 12qq' + r$$

$$\Rightarrow r = 18k - 12qq' = 6(3k - 2qq')$$

$$\Rightarrow r = 6m \Rightarrow 6|r$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۴۶-

(مهمدر علی نادرپور)

$$A = 2b^6 + 3b^5 + 4b^4 = 2b^6 + 0b^5 + 3b^4 + 0b^3 + 4b^2 + 0b + 0$$

$$A = (2030400)_b \Rightarrow$$

$$b \text{ در مبنای } A = \text{مجموع ارقام نمایش} = 2 + 0 + 3 + 0 + 4 + 0 + 0 = 9$$

$$A = 2b^6 + 3b^4 + 4b^2 = 2(b^2)^3 + 3(b^2)^2 + 4(b^2)^1 + 0$$

$$= (2340)_b$$

$$\Rightarrow b^2 \text{ در مبنای } A = \text{مجموع ارقام نمایش} = 2 + 3 + 4 + 0 = 9$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱۴۷-

(کیوان دارابی)

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \end{cases} \Rightarrow [a, b] = a'b'd$$

$$(a^2, b^2) = d^2$$

$$\Rightarrow [[a, b], a + b] \cdot (a^2, b^2) = [a'b'd, (a' + b')d] \cdot d^2$$

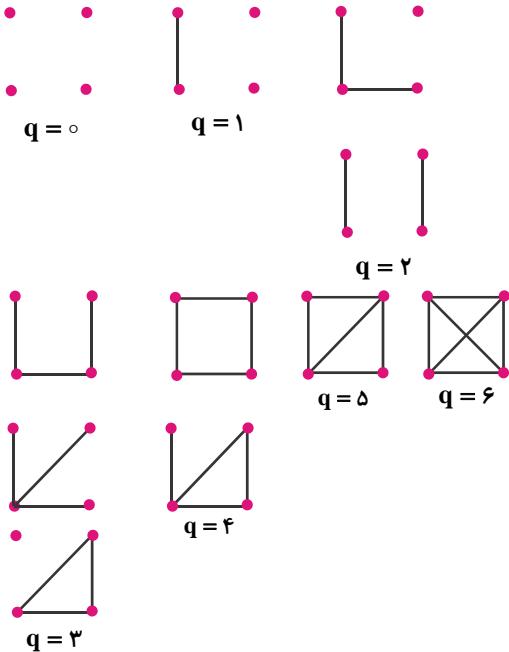
$$= d^3 [a'b', a' + b']$$

ریاضیات گسسته - آزمون شاهد (گواه)

(کتاب آبی - سؤال ۲۵۲)

۱۵۱-

حالت‌های مختلف را رسم می‌کنیم.



(ریاضیات گسسته - نظریه گراف، صفحه‌های ۵ تا ۷ و ۱۰)

(کتاب آبی - سؤال ۲۷۰)

۱۵۲-

در هر گراف  $r$ -منتظم از مرتبه‌ی  $p$  و اندازه‌ی  $q$ ، رابطه‌ی  $pr = 2q$  برقرار است که براساس فرض مسأله  $q = 90$  و در نتیجه  $pr = 180$  خواهد بود. پس  $180$  بر  $p$  بخش‌پذیر است. ضمن آن که  $r$  باید در شرط  $0 \leq r \leq p - 1$  صدق کند. اگر  $p = 12$  باشد، آن‌گاه  $r = 15$  خواهد بود که در شرط  $0 \leq r \leq p - 1$  صدق نمی‌کند. ولی به ازای مقادیر  $15, 18, 20$  برای  $p$ ، مقادیر  $r$  به ترتیب  $12, 10, 9$  به دست می‌آید که همگی قابل قبول هستند.

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

(سراسری ریاضی - ۸۴)

۱۵۳-

برای آن که درخت، حداقل رئوس درجه‌ی یک را داشته باشد باید  $\Delta$  را کم‌ترین مقدار در نظر بگیریم و تعداد رئوس درجه‌ی ۲ را تا می‌توانیم زیاد کنیم پس:

$$120 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times \dots \times 1$$

$$1 = 6 = (3-2) \times 1 + (5-2) \times 1 + 2 = \text{تعداد رئوس درجه ۱}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

$$(a', b') = 1 \Rightarrow \frac{(a'b')}{c} \cdot \frac{(a'+b')}{d} = 1 \Rightarrow [c, d] = |cd|$$

$$\Rightarrow [a'b', a'+b'] = a'b'(a'+b') \Rightarrow d^v [a'b', a'+b']$$

$$= d^v a'b'(a'+b') = da'.db'.d(a'+b') = ab(a+b)$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳ و ۴۵ و ۴۶)

(مدرسه عسینی فر)

۱۴۸-

$$5x = 7y + 1 \Rightarrow 5x - 7y = 1 \Rightarrow (x, y) = 1$$

بنابراین  $x$  و  $y$  هر دو نمی‌توانند زوج باشند. همچنین با توجه به رابطه‌ی  $5x = 7y + 1$ ، بدیهی است که  $x$  و  $y$  هر دو فرد نیستند. پس از میان  $x$  و  $y$ ، یکی زوج و دیگری فرد است. در این صورت داریم:  $(x-y, x+y) = 1$ . تذکر: اگر  $(x, y) = 1$  و  $(x+y, x-y) = d$ ، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d | x+y \\ d | x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | 2x \\ d | 2y \end{cases} \Rightarrow d | 2(x, y) \Rightarrow d | 2$$

در حالتی که  $x$  و  $y$  هر دو فرد باشند،  $d = 2$  و در غیراین صورت  $d = 1$  است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

(امیرسین ابومیبوب)

۱۴۹-

اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد  $n$  را با  $D(n)$  نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$D(n) = 12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$$

$$D(2n) = 15 = 5 \times 3$$

با توجه به مقدار  $D(2n)$  و مقایسه‌ی آن با  $D(n)$  می‌توان دریافت کرد که عدد ۲، یکی از عامل‌های اول عدد  $n$  است و عدد  $n$  را می‌توان به صورت  $n = 2^3 \times p^2$  نوشت.

$$D(3n) = 16 = 8 \times 2 = 4 \times 4$$

از طرفی داریم:

با توجه به توضیحات قبلی، واضح است که حالت  $8 \times 2$  امکان‌پذیر نیست و

$$p = 3 \text{ می‌باشد. یعنی } n = 2^3 \times 3^2.$$

$$D(3 \cdot n) = D(3 \cdot 2^3 \times 3^2) = D(2^4 \times 3^3 \times 5) = 5 \times 4 \times 2 = 40$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

(امیرسین ابومیبوب)

۱۵۰-

اگر مجموع ارقام  $q$ ، سه برابر مجموع ارقام عدد اول  $p$  باشد، آنگاه  $q$  قطعاً بر ۳ بخش‌پذیر است، پس  $q$  عدد اول نیست. بنابراین هیچ دو عدد اولی با مشخصات مورد نظر وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد، صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

(کتاب آبی - سوال ۶۲۳)

-۱۵۸

$$(a, b) = 6 \Rightarrow a = 6a', b = 6b'$$

$$ra + sb = 96 \Rightarrow 6ra' + 6sb' = 96$$

$$\Rightarrow ra' + sb' = 16 \Rightarrow (r, s) | 16$$

در بین گزینه‌ها فقط عدد ۱۶، مقسوم علیه ۱۶ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

(سراسری ریاضی - ۱۹)

-۱۵۹

$$\left. \begin{array}{l} d | 25n + 9 \Rightarrow d | 25 \times 11n + 99 \\ d | 11n + 4 \Rightarrow d | 25 \times 11n + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$$

پس همواره دو عدد نسبت به هم اول هستند و در نتیجه به ازای هر ۹۰ عدد طبیعی

دو رقمی، رابطه برقرار است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

(کتاب آبی - سوال ۶۷۴)

-۱۶۰

$$\frac{a}{b} = \frac{a'd}{b'd} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{4} \xrightarrow{(a', b')=1} a' = 3, b' = 4$$

$$ab + [a, b] = 77 \Rightarrow a'b'd^2 + a'b'd = 77$$

$$12d^2 + 12d - 77 = 0 \Rightarrow 12(d^2 + d - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = -3 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$a + b = d(a' + b') = 2 \times 7 = 14$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳ و ۴۶ و ۴۷)

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰)

-۱۵۴

می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت  $8k+1$  است پس  $b=1$

$$(5 \cdot 0 \cdot 1)_8 \leq (5 \cdot a \cdot 1)_8 \leq (5 \cdot 7 \cdot 1)_8$$

$$2561 \leq (5 \cdot a \cdot 1)_8 \leq 2617 \Rightarrow 2561 \leq (51)^2 = 2601 \leq 2617$$

$$\frac{2601}{1} \left| \begin{array}{l} 8 \\ 325 \\ 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 8 \\ 40 \\ 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 8 \\ 5 \\ 5 \end{array} \right. \Rightarrow 2601 = (5 \cdot 51)_8 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow a + b = 6$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

(کتاب آبی - سوال ۴۸۴)

-۱۵۵

$$\overline{abb} + \overline{baa} = 2k \Rightarrow a + b = 2k'$$

بنابراین  $a$  و  $b$  یا هر دو زوجند یا هر دو فرد.

$$a \text{ و } b \text{ هر دو زوج} : \begin{cases} a = 2t \\ b = 2t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4t^2 \\ b^2 = 4t'^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4q$$

$$a \text{ و } b \text{ هر دو فرد} : \begin{cases} a = 2t + 1 \\ b = 2t' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4t^2 + 4t + 1 \\ b^2 = 4t'^2 + 4t' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4q''$$

پس باقی‌مانده‌ی  $a^2 - b^2$  بر ۴، صفر است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

(کتاب آبی - سوال ۴۹۲)

-۱۵۶

$$802 = 14b + r \xrightarrow{0 \leq r < b} \begin{cases} r = 802 - 14b \geq 0 \Rightarrow b \leq 57 \\ r = 802 - 14b < b \Rightarrow b \geq 54 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 54 \leq b \leq 57$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

(آزار ریاضی - ۷۲)

-۱۵۷

$$41! - 40! = 41 \times 40! - 40! = 40!(41 - 1) = 40! \times 40$$

در سمت راست عدد  $40!$ ، ۹ صفر وجود دارد، در سمت راست  $40!$  نیز یک صفر وجود دارد، پس در سمت راست  $40! \times 40$ ، ۱۰ صفر وجود دارد.

$$40 \mid 5$$

$$8 \mid 5 \Rightarrow 8 + 1 = 9 : 40! \text{ سمت راست}$$

$$1$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

فیزیک پیش‌دانشگاهی

۱۶۱

(روح‌اله علی‌پور)

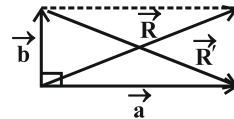
زمانی که دو بردار بر هم عمود باشند، اندازه بردار برابری و اندازه بردار تفاضل آن‌ها یکسان خواهد بود و از رابطه فیثاغورس به دست می‌آید.

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\vec{R}' = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\Rightarrow R' = \sqrt{a^2 + b^2}$$



(فیزیک ۲ - اندازه‌گیری و بردار؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۲)

۱۶۲

(امیرمسین برادران)

روش اول: معادله حرکت هر دو متحرک را می‌نویسیم. داریم:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 t + x_{01} \\ x_2 = v_2 t + x_{02} \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = (v_2 - v_1)t + (x_{02} - x_{01})$$

$$\xrightarrow{t=0} x_{02} - x_{01} = 10 \text{ m} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1), t=3\text{s}} 16 = (v_2 - v_1) \times 3 + 10 \Rightarrow v_2 - v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 30 = 2t + 10 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

روش دوم: یک متحرک را ثابت و متحرک دیگر را در حال حرکت فرض می‌کنیم.

با استفاده از سرعت نسبی بین دو متحرک داریم:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}} \Delta t \Rightarrow \frac{30 - 10}{16 - 10} = \frac{t}{3} \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۷)

۱۶۳

(غلامرضا ممینی)

روش اول: با استفاده از رابطه مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت در مسیری

مستقیم برای هر قسمت داریم:

حرکت تندشونده:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_1 \Delta x_1 \Rightarrow v^2 - 0 = 2ax_1 \Rightarrow x_1 = \frac{v^2}{2a} \quad (1)$$

حرکت کندشونده:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_2 \Delta x_2 \Rightarrow 0 - v^2 = 2(-2a)x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{v^2}{4a} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{v^2}{4a}}{\frac{v^2}{2a}} = \frac{1}{2}$$

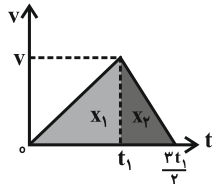
روش دوم: نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک را رسم می‌کنیم. داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{a}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = (-2a)t_2 + at_1 \Rightarrow t_2 = \frac{t_1}{2}$$

مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر با اندازه

جابه‌جایی متحرک است. داریم:



$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{2}v \times \frac{t_1}{2}}{\frac{1}{2}v \times t_1} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۷)

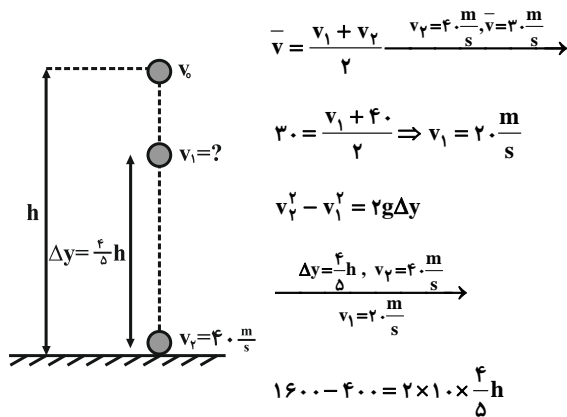
۱۶۴

(مصطفی کیانی)

ابتدا با استفاده از رابطه سرعت متوسط، سرعت گلوله در ابتدای  $\frac{4}{5}$  آخر مسیر

حرکت را حساب می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطه مستقل از زمان، ارتفاع  $h$

را به دست می‌آوریم. دقت کنید، جهت رو به پایین را مثبت فرض کرده‌ایم.



$$\frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{v_2 + v_1}{2} \quad v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_1 = ?$$

$$3 = \frac{v_1 + 4}{2} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\Delta y$$

$$\frac{\Delta y = -\frac{4}{5}h, v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$1600 - 400 = 2 \times 10 \times \frac{4}{5}h$$

$$\Rightarrow 1200 = 16h \Rightarrow h = 75 \text{ m}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۶۵

(امیرمسین برادران)

مدت زمانی که پس از پرتاب گلوله توپ طول می‌کشد تا صدای انفجار آن به

گوش شنونده برسد برابر با مجموع زمانی است که گلوله بالا می‌رود ( $t$ ) و زمانی

که طول می‌کشد تا صدای انفجار به گوش شنونده برسد ( $t'$ ). داریم:

$$t + t' = 5 \text{ s} \Rightarrow t' = 5 - t \quad (1)$$

(نیما نوروزی)

۱۶۸-

در حرکت پرتابی در خلأ، زمانی که زاویه‌های پرتاب دو متحرک که با سرعت اولیه یکسان پرتاب می‌شوند، متمم یکدیگر باشد (و یا به عبارت دیگر، از زاویه  $۴۵^\circ$  به یک‌اندازه فاصله داشته باشند)، بُرد دو پرتابه یکسان است. از طرفی به ازای یک سرعت اولیه یکسان، بُرد پرتابه‌ای که با زاویه  $۴۵^\circ$  پرتاب می‌شود، بیشینه است، بنابراین در این سؤال، پرتابه‌هایی که با زوایای پرتاب  $۳۰^\circ$  و  $۶۰^\circ$  پرتاب می‌شوند در نقطه A و پرتابه‌ای که با زاویه پرتاب  $۴۵^\circ$  پرتاب می‌شود در نقطه B به زمین می‌رسد.

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (۱)$$

$$R' = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \rightarrow R' = \frac{v_0^2 \sin 2(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{g}$$

$$\Rightarrow R' = \frac{v_0^2 \sin(\pi - 2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (۱) \rightarrow R' = R$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \frac{dR}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2 \cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

(علیرضا پارمهری)

۱۶۹-

در حرکت پرتابی در خلأ، در نقطه اوج، بردار سرعت و شتاب پرتابه بر هم عمود می‌شوند. بنابراین داریم:

$$t_{\text{اوج}} = \frac{v_{0y}}{g} \Rightarrow ۴ = \frac{v_{0y}}{۱۰} \Rightarrow v_{0y} = ۴۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

برای سرعت اولیه گلوله می‌توان نوشت:

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \Rightarrow ۵۰^2 = v_{0x}^2 + ۴۰^2 \Rightarrow v_{0x} = ۳۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حال با استفاده از رابطه بُرد یک پرتابه داریم:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2(v_0 \cos \alpha)(v_0 \sin \alpha)}{g} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2 \times ۳۰ \times ۴۰}{۱۰} \Rightarrow R = ۲۴۰ \text{ m}$$

ارتفاع نقطه اوج پرتابه برابر است با:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$\Rightarrow H = \frac{۴۰^2}{2 \times ۱۰} = ۸۰ \text{ m} \Rightarrow \frac{R}{H} = \frac{۲۴۰}{۸۰} = ۳$$

تمرین: بین بُرد یک پرتابه (R)، ارتفاع اوج آن (H) و زاویه پرتاب آن ( $\alpha$ ).

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{4} \tan \alpha$$

رابطه مقابل برقرار است:

ابتدا رابطه فوق را اثبات کنید و سپس با محاسبه زاویه پرتاب و استفاده از رابطه فوق، نسبت بُرد پرتابه به ارتفاع اوج آن را بیابید.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

فرض می‌کنیم گلوله در ارتفاع h از سطح زمین منفجر شود، داریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow h = -\Delta t^2 + ۱۰ \cdot t \quad (۲)$$

$$\Delta x_{\text{صوت}} = v_{\text{صوت}} \times t' \Rightarrow h = ۳۲ \cdot t' \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳),(۲),(۱)} -\Delta t^2 + ۱۰ \cdot t = ۳۲ \cdot (\Delta - t) \Rightarrow t^2 - ۸۴t + ۳۲ \cdot ۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۴)(t - ۸۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۴ \text{ س} & \text{ق.ق} \\ t = ۸۰ \text{ س} & \text{غ.ق} \end{cases}$$

برای محاسبه سرعت گلوله در لحظه انفجار، داریم:

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -۱۰ \times ۴ + ۱۰ \cdot ۰ \Rightarrow v = ۶۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

دقت کنید  $t = ۸۰ \text{ s}$  غیرقابل قبول است، چون طبق رابطه

$$\Delta y = -\Delta t^2 + ۱۰ \cdot t$$

گلوله پس از ۲۰ s به زمین می‌رسد.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی: صفحه‌های ۲۵ تا ۳۱)

(فاروق مردانی)

۱۶۶-

در لحظه‌ای که بردار سرعت متحرک در جهت محور y است، مؤلفه x بردار سرعت برابر با صفر است. داریم:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = ۱ \text{ s} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 8t \end{cases}$$

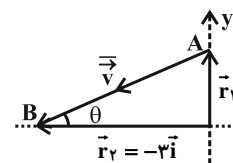
در این لحظه مؤلفه قائم بردار شتاب برابر است با:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 6t + 8 \xrightarrow{t=1\text{s}} a_y = 6 \times 1 + 8 \Rightarrow a_y = ۱۴ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۱)

(فرشید رسولی)

۱۶۷-



متحرک بر مسیر مستقیم از

A تا B حرکت کرده است

و بردار سرعت متوسط آن

هم‌جهت با بردار جابه‌جایی

آن است.

$$\tan \theta = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

هم‌چنین بردارهای سرعت متحرک در دو نقطه A و B، مماس بر مسیر حرکت

یعنی روی مسیر AB بوده و به دلیل کندشونده بودن حرکت، اندازه  $\vec{v}_B$

کوچک‌تر از اندازه  $\vec{v}_A$  است و می‌دانیم بردار شتاب متوسط هم‌جهت با بردار

تغییرات سرعت متحرک است.



(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۱)

(غلامرضا مصبی)

۱۷۳-

ابتدا اندازه شتاب گرانی را در فاصله  $۳R_e$  از سطح زمین محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$g = G \frac{M_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g_h}{g_o} = \left( \frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 \xrightarrow{h=3R_e} \frac{g_h}{10} = \left( \frac{R_e}{4R_e} \right)^2$$

$$\Rightarrow g_h = \frac{10}{16} \frac{m}{s^2}$$

برای محاسبه اندازه وزن جسم در این ارتفاع خواهیم داشت:

$$W_h = mg_h = ۳۶ \times \frac{10}{16} = ۲۲.۵ \text{ N}$$

(فیزیک ۲ - دینامیک: صفحه‌ی ۶۱)

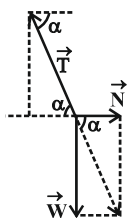
(غلامرضا مصبی)

۱۷۴-

ابتدا نیروهای وارد بر کره را به صورت زیر ترسیم می‌کنیم. با توجه به این که کره در حال تعادل است، برآیند نیروهای وارد بر آن برابر با صفر است:

$$\tan \alpha = \frac{W}{N}$$

$$\frac{\tan \alpha = \frac{h}{r} = ۴}{W = mg = ۶۰ \text{ N}} \Rightarrow ۴ = \frac{۶۰}{N}$$



$$\Rightarrow N = ۱۵ \text{ N}$$

طبق قانون سوم نیوتون، اندازه نیرویی که از طرف کره به دیوار وارد می‌شود با اندازه نیرویی که از طرف دیوار به کره وارد می‌شود، برابر است. داریم:

$$N' = N = ۱۵ \text{ N}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - دینامیک: صفحه‌های ۴۲ تا ۵۳)

(بهادر کامران)

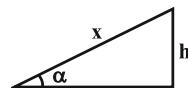
۱۷۵-

وقتی جسم با سرعت ثابت روی سطح شیب‌دار به سمت پایین حرکت می‌کند،  $\mu_k = \tan \alpha$  می‌باشد. حال اگر جسم را با سرعت  $v_o$  روبه بالا پرتاب کنیم،

$$t = \frac{v_o}{|a|} \quad |a| = g(\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha) \rightarrow \text{زمان توقف برابر خواهد بود با:}$$

$$t = \frac{v_o}{g(\sin \alpha + \mu_k \cos \alpha)}$$

$$\mu_k = \tan \alpha \rightarrow t = \frac{v_o}{\cancel{g} \sin \alpha}$$



(فیزیک پیش‌دانشگاهی - دینامیک: صفحه‌های ۴۲ تا ۵۳)

(محمدر نادری)

۱۷۶-

زمانی جسم  $M_p$  یا  $M_s$  شروع به لغزش می‌کنند که نیروی اصطکاک رو به جلوی وارد بر آنها، به حداکثر مقدار خود رسیده باشد. فرض می‌کنیم که نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم  $M_p$  حداکثر مقدار خود را داشته باشد. از اینجا حداکثر شتابی را که مجموعه با آن می‌تواند حرکت کند بدون آن که لغزشی صورت پذیرد، پیدا می‌کنیم.

$$\vec{f}_{s \max} \leftarrow \boxed{M_p} \Rightarrow (f_{s \max})_p = M_p a \Rightarrow \mu_{sp} M_p g = M_p a$$

$$a = \mu_{sp} g = 0.2 \times 10 = 2 \frac{m}{s^2}$$

(ناصر فوارزمی)

۱۷۰-

در حرکت پرتابی در خلأ، سرعت حرکت پرتابه در راستای افقی همواره ثابت است. بنابراین با توجه به این که پرتابه به صورت افقی پرتاب شده است، می‌توان نوشت:

$$v_{ox} = v_x = ۳ \cdot \frac{m}{s}$$

$$v_{oy} = 0 \quad \text{و} \quad v_y = -۴ \cdot \frac{m}{s}$$

مدت زمان حرکت پرتابه تا لحظه برخورد به زمین برابر است با:

$$v_y = -gt + v_{oy} \Rightarrow -۴ = -1 \cdot t + 0 \Rightarrow t = ۴ \text{ s}$$

در لحظه  $t = ۴ \text{ s}$ ، مکان گلوله برابر است با:

$$x = v_{ox}t + x_o = ۳ \cdot ۴ + 0 \Rightarrow x = ۱۲ \cdot m$$

$$y = \frac{-1}{2}gt^2 + v_{oy}t + y_o = -5 \times 4^2 + 0 + 0 \Rightarrow y = -۸ \cdot m$$

$$\xrightarrow{t=۴\text{s}} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = ۱۲ \cdot \vec{i} - ۸ \cdot \vec{j} \text{ (m)}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت‌شناسی: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

(کامظم شاهمگلی)

۱۷۱-

ابتدا اندازه شتاب جسم را به دست می‌آوریم. داریم:

$$a = \sqrt{۲^2 + ۱/5^2} = ۲/5 \frac{m}{s^2}$$

حال مطابق قانون دوم نیوتون می‌توان جرم جسم را به دست آورد. داریم:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow 5 = m \times ۲/5 \Rightarrow m = ۲ \text{ kg}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - دینامیک: صفحه‌ی ۴۲)

(بابک اسلامی)

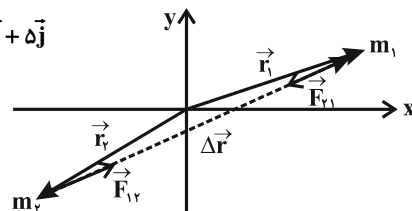
۱۷۲-

با توجه به این که نیروی گرانشی بین دو جرم همواره ریبایشی است، پس نیروی گرانشی که جرم  $m_1$  به جرم  $m_2$  وارد می‌کند ( $\vec{F}_{12}$ ) در جهت بردار

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{خواهد بود. بنابراین داریم:}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{r} = (v\vec{i} + ۲\vec{j}) - (-5\vec{i} - ۳\vec{j})$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{r} = ۱۲\vec{i} + 5\vec{j}$$

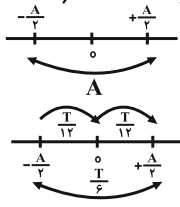


(فیزیک ۲ - دینامیک: صفحه‌های ۵۹ و ۶۰)

۱۷۹-

(متمرعلی عباری)

کمینه زمان برای طی یک مسافت معین مربوط به بازه متقارنی به مرکزیت مرکز نوسان است و این مربوط به زمانی است که نوسانگر از نصف دامنه در یک طرف به نصف دامنه در طرف دیگر برود، یعنی مثلاً از فاز  $\frac{\Delta\pi}{6}$  رادیان به  $\frac{7\pi}{6}$  رادیان برود.



$$\Delta\phi = \omega\Delta t$$

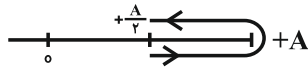
$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \Delta t_{\min}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{\min} = \frac{T}{6}$$

بیشینه زمان برای طی مسافت معین A مربوط به بازه‌ای است که متحرک در انتهای پاره‌خط نوسان  $\frac{A}{2}$  را طی کرده، بایستد و سپس به جای قبلی خود بازگردد، یعنی مثلاً از فاز  $\frac{\pi}{6}$  رادیان به  $\frac{5\pi}{6}$  رادیان برود.

$$\Delta\phi = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \Delta t_{\max} \Rightarrow \Delta t_{\max} = \frac{T}{3}$$

$$\frac{\Delta t_{\min}}{\Delta t_{\max}} = \frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{3}} = \frac{1}{2}$$



(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت نوسانی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۸)

۱۸۰-

(روح‌الله علی‌پور)

معادله شتاب - مکان نوسان هماهنگ ساده به صورت  $a = -\omega^2 x$  است. پس  $\omega = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$  و در نتیجه  $T = 4s$  است. مدت زمان حرکت نوسانگر ساده از یک انتها تا انتهای دیگر پاره‌خط نوسان  $\frac{T}{4}$  یعنی ۱s است و اندازه جابه‌جایی نوسانگر نیز برابر ۲A یا برابر با طول پاره‌خط نوسان یعنی ۲۴cm است. در نتیجه سرعت متوسط نوسانگر  $\bar{v} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm/s}$  می‌شود.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت نوسانی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۹۱)

۱۸۱-

(سیدعلی میرنوری)

در هر حالت نسبت انرژی جنبشی به انرژی مکانیکی را می‌یابیم:

$$E = U + K \Rightarrow \frac{U}{E} + \frac{K}{E} = 1$$

$$\frac{U_1}{K_1} = 3 \Rightarrow U_1 = 3K_1 \text{ و } E = U_1 + K_1 = 4K_1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_1}{E} = \frac{3}{4} \\ \frac{K_1}{E} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{U_2}{K_2} = 15 \Rightarrow U_2 = 15K_2 \text{ و } E = U_2 + K_2 = 16K_2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_2}{E} = \frac{15}{16} \\ \frac{K_2}{E} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

حال بررسی می‌کنیم که  $M_2$  می‌تواند با این شتاب حرکت کند یا نه.

$$\vec{f}_{s_2} \leftarrow \boxed{M_2} \rightarrow \vec{(f_s \max)_2}$$

$$\Rightarrow f_{s_2} - (f'_s \max)_2 = M_2 a$$

$$\Rightarrow f_{s_2} - \mu_{s_2} M_2 g = M_2 a \Rightarrow f_{s_2} - 0.2 \times 10 \times 10 = 2 \times 2$$

$$\Rightarrow f_{s_2} = 6N < (f_s \max)_2 = \mu_{s_2} (M_2 + M_3) g = 12N$$

مقدار  $\vec{f}_{s_2}$  کمتر از مقدار  $(f_s \max)_2$  است؛ یعنی فرض ما درست بوده و با حداکثر F، جسم  $M_3$  در آستانه لغزش خواهد بود.  
حال برای جسم  $M_1$  می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{F} \leftarrow \boxed{M_1} \rightarrow \vec{f}_{s_2}$$

$$\Rightarrow F - f_{s_2} = M_1 a \Rightarrow F - 6 = 5 \times 2$$

$$\Rightarrow F = 16N$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - دینامیک؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۵۳)

۱۷۷-

(فسرو ارغوانی‌فر)

طبق رابطه  $\vec{P} = m\vec{v}$ ، همواره بردارهای سرعت و تکانه در یک جهت هستند، همچنین طبق رابطه  $\vec{F} = m\vec{a}$ ، همواره جهت بردارهای شتاب و بردار برآیند نیروهای وارد بر جسم نیز یکسان است. پس زاویه‌ای که بردار سرعت با بردار شتاب می‌سازد همان زاویه‌ای است که بردار تکانه با بردار برآیند نیروها می‌سازد.

$$t = 1s \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_i + \vec{P}_j \quad \left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = (2t + 2)\vec{i} + 3\vec{j} \xrightarrow{t=1s} \vec{F} = \vec{F}_i + \vec{F}_j \quad (\text{N})$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، جهت دو بردار نیرو و تکانه در این لحظه یکسان است، بنابراین زاویه بین آنها صفر می‌باشد.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - دینامیک؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱۷۸-

(ناصر غوارزمی)

نیروی مرکزگرا برای حرکت اتومبیل در مسیر دایره‌ای توسط نیروی اصطکاک ایستایی بین چرخ‌های اتومبیل و سطح جاده تأمین می‌شود و چون اتومبیل با بیشینه سرعت ممکن بدون آن که بلغزد، حرکت می‌کند، اصطکاک ایستایی نیز بیشینه خواهد بود. داریم:

$$f_{s \max} = m r \omega^2 \Rightarrow \mu_s m g = m r \omega^2 \Rightarrow \mu_s = \frac{r \omega^2}{g} \quad (1)$$

$$2\pi r = 60.0 \Rightarrow 2 \times 3r = 60.0 \Rightarrow r = 10.0 \text{ m}$$

و نیز چون در ۲۰ ثانیه یک دور می‌زند پس  $T = 20 \text{ s}$  بوده که از روی آن

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3}{20} = 0.3 \text{ rad/s}$$

که با جایگذاری مقادیر به دست آمده در رابطه (۱)،  $\mu_s$  به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{(1)} \mu_s = \frac{10.0 \times (0.3)^2}{9.8} = 0.09$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - دینامیک؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۷۰)

(اسماعیل امارم)

۱۸۵-

$$\frac{\lambda}{2} = 0.2 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0.4 \text{ m}$$

از روی شکل داریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow v = 0.4 \times 20 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

بنابراین سرعت موج برابر است با:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = 8 \times 0.4 = 3.2 \text{ m}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۰)

(سیدابوالفضل فالقی)

۱۸۶-

$$\frac{\lambda}{2} = 1.0 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 2.0 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$$

با استفاده از نقش موج، داریم:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\omega = kv \Rightarrow \omega = 100\pi \times 20 = 2000\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

معادله نقش موج برابر است با:

$$U = A \sin(\omega t - kx) = 4 \times 10^{-2} \sin(2000\pi t - 100\pi x)$$

بنابراین برای نقطه M داریم:

$$\xrightarrow{x_M = 0.15 \text{ m}} U_M = 4 \times 10^{-2} \sin(2000\pi t - 100\pi \times 0.15)$$

$$\Rightarrow U_M = 4 \times 10^{-2} \sin(2000\pi t - \frac{3\pi}{2})$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

(مصطفی کیانی)

۱۸۷-

نقطه‌هایی از محیط انتشار موج که هم بُعد و هم سرعت باشند، در هر لحظه دارای

یک وضعیت نوسانی‌اند، لذا با یک‌دیگر هم‌فازند. در ضمن اختلاف فاز این نقطه‌ها

همواره مضرب زوجی از  $\pi$  می‌باشد و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند باشد.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۰)

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{E}{K_1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{درصد تغییر سرعت} = \frac{\Delta v}{v_1} \times 100 = -50\%$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - حرکت نوسانی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۹۳)

(فرشید رسولی)

۱۸۲-

در شکل کاملاً مشخص است که  $\lambda_1 > \lambda_2$  است، اما در

مورد بسامد موج در دو طناب نمی‌توان نظر قطعی داد



چون بسامد نوسان‌های موج از ویژگی‌های منبع موج است

و چون در مورد مشخصات منبع موج اطلاعاتی نداریم،

بنابراین نمی‌توان در مورد بسامد دو موج اظهار نظر کرد.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۱۱)

(نیمه علی پورکفشگر)

۱۸۳-

سرعت انتشار امواج عرضی در یک تار از رابطه  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  به دست می‌آید. با دو

برابر شدن طول تار، جرم تار نیز دو برابر می‌شود و  $\mu$  ثابت می‌ماند. در نتیجه با

۴ برابر شدن  $F$ ، اندازه سرعت انتشار امواج عرضی در تار ۲ برابر می‌شود.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۰۸)

(روح‌اله علی‌پور)

۱۸۴-

فاصله دو نقطه در فاز مخالف با یکدیگر  $(2n-1)\frac{\lambda}{4}$  و فاصله دو نقطه هم‌فاز

$m\lambda = 2m\frac{\lambda}{2}$  است. نسبت این دو فاصله نسبت یک عدد فرد  $(2n-1)$  به

عددی زوج  $(2m)$  است و طبق فرض سوال چون موج با این شرایط دارای

بیش‌ترین طول موج ممکن است، بنابراین داریم:

$$\frac{2n-1}{2m} = \frac{84}{240} = \frac{7}{20}$$

پس  $\frac{\lambda}{4}$  برابر با  $12 \text{ cm}$  می‌شود. فاصله پنجمین نقطه در فاز مخالف با منبع،

برابر با  $\frac{\lambda}{2}$   $(2 \times 5 - 1)$  است که  $108 \text{ cm}$  می‌شود.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۰)



$$\lambda = vT \xrightarrow{\lambda = 1/2m} 1/2 = 6T \Rightarrow T = 0.12s$$

مدت زمانی که طول می‌کشد ذره B به موقعیت ذره A برسد، برابر است با:

$$\Rightarrow \Delta\phi_{BA} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \xrightarrow{\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t} \Delta t_{BA} = \frac{7T}{12}$$

$$\xrightarrow{T = 0.12s} \Delta t = \frac{7}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{72} s$$

$$\Rightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta x = 6 \times \frac{7}{72} = 0.5m$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

(ناصر خوارزمی)

-۱۹۰

می‌دانیم سرعت انتشار موج در یک محیط کشسان به شرط آن که شرایط فیزیکی محیط تغییر نکند، ثابت باقی می‌ماند. از طرف دیگر طبق رابطه

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = 2\pi f \times \frac{\Delta x}{v}$$

اختلاف فاز بین دو نقطه A و B به علت تغییر بسامد خواهد بود. داریم:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\phi_2}{\Delta\phi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \xrightarrow{\Delta\phi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \Delta\phi_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}} \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \xrightarrow{\omega_1 = \pi \frac{\text{rad}}{s}} \frac{\pi}{\pi} = \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{f\pi \text{ rad}}{\delta} \quad (1)$$

$$k = \frac{\omega}{v} \xrightarrow{v_1 = v_2} \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \frac{k_2}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{f\pi}{\delta}}{\pi}$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{f\pi \text{ rad}}{15 \text{ m}} \quad (2)$$

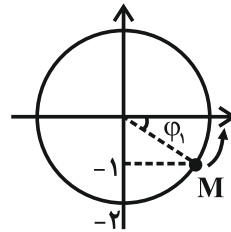
$$u_y = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\xrightarrow{A_2 = A_1 = 0.2m} u_y = 0.2 \sin\left(\frac{f\pi}{\delta} t - \frac{f\pi}{15} x\right)$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

(مهم اسری)

-۱۸۸



ابتدا فاز نقطه M را در لحظه اولیه به دست

می‌آوریم. با توجه به جهت انتشار موج، نقطه

M به سمت بالا حرکت خواهد کرد.

بنابراین داریم:

$$\sin\phi_1 = \frac{y}{A} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \phi_1 = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{سوال} \Rightarrow \lambda + \frac{\lambda}{2} = 120 \Rightarrow \lambda = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow 0.8 = \frac{10}{f} \Rightarrow f = 12.5 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 25\pi \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\Delta\phi = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\phi = 25\pi \times \frac{1}{5} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\phi_1 = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}} \phi_2 = \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

پس در این مدت نقطه M از فاز  $\phi_1 = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$  به فاز  $\phi_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

منتقل می‌شود. بنابراین ابتدا به مرکز نزدیک می‌شود و سپس از آن دور می‌شود.

پس حرکت آن ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - موج‌های مکانیکی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

(پوار کامران)

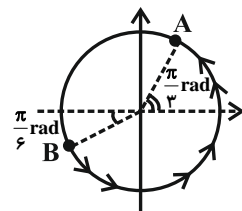
-۱۸۹

ابتدا فاز ذره A و ذره B را در  $t_0$  معلوم می‌کنیم. با توجه به دایره مرجع

$$\text{شکل زیر} \quad \phi_A = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad \text{و} \quad \phi_B = \frac{7\pi}{6} \text{ rad} \text{ است.}$$

با توجه به نمودار، ابتدا طول موج و سپس دوره تناوب آنرا حساب می‌کنیم.

$$\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{v\lambda}{12} = \frac{v}{10} \Rightarrow \lambda = 1/2m$$





شیمی پیش‌دانشگاهی

۱۹۱-

(مرغی فوش‌کیش)

دو شکل نشان داده شده در گزینه‌ی «۴» بیان‌کننده‌ی تأثیر سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها بر سرعت واکنش می‌باشند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) کلسیم اکسید یک ترکیب جامد بوده و غلظت آن ثابت است و تغییر نمی‌کند.

(۲) اگر واکنشی گرماده و با افزایش بی‌نظمی همراه باشد، می‌توان گفت از لحاظ ترمودینامیکی مساعد بوده و امکان وقوع آن وجود دارد، اما در مورد سرعت آن نمی‌توان اظهار نظر کرد.

(۳) شکل (الف) نشان‌دهنده‌ی زنگ‌زدن آهن در هوای مرطوب است که به کندی انجام می‌شود و شکل (ب)، افزودن محلول سدیم کلرید به محلول نقره نیترات را نشان می‌دهد که باعث تشکیل سریع رسوب سفیدرنگ نقره کلرید می‌شود.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۲، ۳، ۱۰، ۱۱، ۳۷ و ۳۳)

۱۹۲-

(مهمربوار فولاری)

$$\frac{\bar{R}_{O_2}}{1} = \frac{\bar{R}_{NO_2}}{2} \Rightarrow \frac{0.28}{1} = \frac{\bar{R}_{NO_2}}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{NO_2} = 0.56 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$0.56 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 33.6 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳ تا ۹)

۱۹۳-

(حسن رهبری)

چون غلظت ماده‌ی داده شده در حال افزایش است، پس باید یکی از فرآورده‌ها باشد و چون غلظت ماده‌ی جامد ثابت است، بنابراین اطلاعات داده شده مربوط به گاز اکسیژن است. از ثانیه ۱۵ به بعد واکنش متوقف شده پس بازه‌ی انجام واکنش از صفر تا ثانیه‌ی ۱۵ خواهد بود و تغییر غلظت نیز از صفر تا ۰.۳ مولار است.

$$\Delta n = \Delta [O_2] \times V = 0.3 \times 2 = 0.6 \text{ mol}$$

$$\Delta t = 15 \text{ s} = 0.25 \text{ min}$$

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{0.6}{0.25} = 2.4 \text{ mol.min}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{O_2}}{\text{ضریب } O_2} = \frac{2.4}{3} = 0.8 \text{ mol.min}^{-1}$$

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳ تا ۹ و ۳۷)

۱۹۴-

(مسعود پعفری)

در جدول داده شده مواد **A** و **B** مشخص نشده‌اند، پس ابتدا باید نوع هر یک از این دو ماده را تعیین کنیم. غلظت **A** به تدریج و با گذشت زمان در حال کاهش است، بنابراین **A** واکنش‌دهنده می‌باشد. تنها واکنش‌دهنده‌ی

واکنش داده شده  $N_2O_5$  است، پس ماده‌ی **A**،  $N_2O_5$  می‌باشد. غلظت ماده‌ی **B** به تدریج در حال افزایش است، بنابراین **B** یکی از دو فرآورده‌ی واکنش یعنی  $NO_2$  یا  $O_2$  می‌باشد. برای انتخاب یکی از این دو ماده، باید از نسبت بین غلظت‌ها استفاده کنیم. در بازه‌ی زمانی بین ۵ تا ۱۰ ثانیه، غلظت ماده‌ی **A** که همان  $N_2O_5$  است، به اندازه‌ی  $0.6 \text{ mol.L}^{-1}$  کاهش یافته است و در همین زمان، غلظت ماده‌ی **B**، به اندازه‌ی  $0.3 \text{ mol.L}^{-1}$  افزایش یافته است. بنابراین با توجه به این‌که تغییر غلظت  $N_2O_5$  دو برابر تغییر غلظت ماده‌ی **B** است و ضریب استوکیومتری  $N_2O_5$  دو برابر ضریب استوکیومتری ماده‌ی **B** می‌باشد، پس می‌توانیم این نتیجه را بگیریم که ماده‌ی **B**،  $O_2$  است.

اکنون می‌توانیم از نسبت ضرایب استوکیومتری دو ماده‌ی  $N_2O_5$  و  $O_2$  برای مشخص کردن **a** و **b** استفاده کنیم. در بازه‌ی زمانی بین ۱۰ تا ۱۵ ثانیه، غلظت ماده‌ی **A** که همان  $N_2O_5$  است، به اندازه‌ی  $0.5 \text{ mol.L}^{-1}$  کاهش پیدا کرده، پس غلظت ماده‌ی **B** که همان  $O_2$

است، به اندازه‌ی  $0.25 \text{ M}$ ، افزایش پیدا می‌کند، در نتیجه،

مقدار **a** برابر  $1/8 \text{ mol.L}^{-1} = (1/6 + 0.25)$  می‌باشد. برای محاسبه‌ی **b** از تغییر غلظت مواد، در بازه‌ی ۱۰ تا ۲۰ ثانیه استفاده می‌کنیم.

در این بازه، غلظت  $O_2$  به اندازه‌ی  $0.4 \text{ mol.L}^{-1}$  زیاد شده پس غلظت  $N_2O_5$  به اندازه‌ی  $0.8 \text{ mol.L}^{-1}$  یعنی  $2 \times 0.4$  کم می‌شود، در نتیجه، مقدار **b** برابر  $6/8 = 3/4$  می‌باشد.

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌ی ۹)

۱۹۵-

(حسن عیسی‌زاده)

واکنش بین  $N_2$  و  $O_2$  در دماهای بالای موتور خودروها انجام شده و گاز  $NO$  را تولید می‌کند. تشریح سایر گزینه‌ها:

(۱) نگهداری فرآورده‌های گوشتی به حالت منجمد، سرعت فاسدشدن آن‌ها را کاهش می‌دهد ولی به صفر نمی‌رساند.

(۲) در نظریه‌ی برخورد، ذره‌های واکنش‌دهنده به‌صورت گوی‌های سخت در نظر گرفته می‌شوند.

(۴) محلول بنفش رنگ پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق به کندی واکنش می‌دهد.

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۷، ۱۰، ۱۱ و ۱۵)

۱۹۶-

(مهمربوار عظیمیان‌زواره)

دو برابر بودن غلظت **A** نسبت به **B** در محاسبات تأثیری ندارد. اگر غلظت آغازی **A** را **x** مول بر لیتر فرض کنید، در لحظه‌ی **t** که سرعت واکنش

$\frac{1}{16}$  سرعت آغازی آن است، غلظت **A** باید  $0.25x$  مول بر لیتر باشد زیرا:



$$\left. \begin{aligned} & \text{در آغاز: } R_1 = k \times (x)^2 = kx^2 \\ & \text{در لحظه } t: R_2 = k[A]_t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{16} = \frac{k[A]_t^2}{kx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{[A]_t}{x} \Rightarrow [A]_t = 0.25x$$

اکنون درصد ماده‌ی A باقی‌مانده را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{\text{غلظت A در لحظه } t}{\text{غلظت اولیه A}} \times 100 = \frac{0.25x}{x} \times 100 = 25\%$$

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۱۹۷-

(مهری فائق)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) شعله‌ی ایجاد شده در این واکنش‌ها ناشی از سوختن گاز هیدروژن تولید شده است.

۲) اگر واکنش‌دهنده‌ها همگی در یک فاز قرار داشته باشند، واکنش سرعت بیش‌تری خواهد داشت.

۳) تنها تغییر غلظت واکنش‌دهنده‌هایی که در فاز گاز یا محلول هستند و در سرعت واکنش مؤثر هستند، باعث تغییر سرعت واکنش می‌گردد. غلظت مواد جامد تغییر نمی‌کند پس عبارت نادرست است.

(شیمی ۲، صفحه‌ی ۳۵) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱۹۸-

(مرتضی فوش‌کیش)

با توجه به نمودار داده شده به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\Delta H = E_a - E'_a = 92 \text{ kJ} - 60 \text{ kJ} = +32 \text{ kJ}$$

گزینه‌ی «۱»: بنا بر این واکنش گرماگیر و واکنش‌دهنده‌ها به اندازه‌ی ۳۲kJ پایدارتر از فرآورده‌ها می‌باشند. (نادرست)

گزینه‌ی «۲»: با توجه به این که  $E_a > E'_a$  است، سرعت تبدیل B به A بیش‌تر از سرعت تبدیل A به B می‌باشد. (درست)

گزینه‌ی «۳»: با افزایش کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی واکنش رفت و برگشت به یک میزان کاهش یافته و سرعت واکنش‌ها افزایش می‌یابد و سطح انرژی فرآورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. (نادرست)

گزینه‌ی «۴»: واکنش گرماگیر و  $\Delta H = +32 \text{ kJ}$  است. (نادرست)

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹ و ۲۴)

۱۹۹-

(معمد عظیمیان زواره)

• درست - مثلاً نظریه‌ی حالت گذار علاوه بر فاز گازی برای فاز محلول نیز کاربرد دارد.

• نادرست - نظریه‌ی برخورد فقط برای واکنش‌های فاز گازی (نه محلول) کاربرد دارد.

• درست - با توجه به مقدار عددی  $E_a$  و  $E'_a$  مقدار عددی  $\Delta H$  می‌تواند از  $E'_a$  بزرگ‌تر یا کوچک‌تر یا با آن مساوی باشد، ولی از آن جایی که واکنش گرماگیر است، همواره سطح انرژی فرآورده‌ها به حالت گذار نزدیک‌تر از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها به حالت گذار است.

• نادرست - تنها در واکنش‌های برگشت‌پذیر امکان واکنش دادن فرآورده‌ها و تبدیل آن‌ها به واکنش‌دهنده‌ها وجود دارد.

• درست - تا زمانی که انرژی فعال‌سازی واکنش تأمین نشود این مخلوط در دمای اتاق قابل نگهداری است و انفجاری رخ نمی‌دهد.

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۱۴، ۱۷ و ۱۸)

۲۰۰-

(مصطفی رستم‌آباری)

برای نشان دادن سرعت متوسط در فازهای محلول و گاز می‌توان از یکای مول بر لیتر بر زمان هم استفاده کرد که این یکا برای فازهای جامد و مایع کاربردی ندارد. بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) یکی از فرآورده‌های واکنش مذکور آب است و چون در فاز مایع است، غلظت ثابتی دارد و نمودار غلظت - زمان برای آن به صورت خط راست است.

۳) بررسی چگونگی انجام واکنش در سینتیک انجام می‌شود.  
۴) استفاده از کپسول اکسیژن، بیانگر اثر غلظت بر سرعت واکنش‌ها است.  
(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳، ۴، ۶، ۹ و ۱۰)

۲۰۱-

(بابک مصب)

کاتالیزگرها

کاهش می‌دهند:

- ۱) انرژی فعال‌سازی رفت  
۲) انرژی فعال‌سازی برگشت  
۳) سطح انرژی پیچیده‌ی فعال  
۴) زمان انجام واکنش

افزایش می‌دهند:

- ۱) سرعت واکنش رفت  
۲) سرعت واکنش برگشت  
۳) پایداری پیچیده‌ی فعال  
تغییر نمی‌دهند:

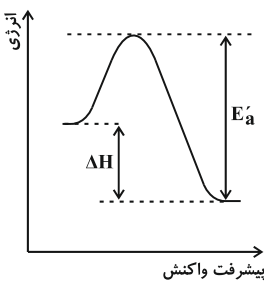
- ۱) سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها  
۲) سطح انرژی فرآورده‌ها  
۳) گرمای واکنش  
۴) نوع محصول

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌ی ۲۴)

۲۰۲-

(مسعود یعقوبی)

از این جمله که محتوای انرژی فرآورده‌ها به اندازه‌ی ۴۵ کیلوژول از محتوای انرژی واکنش‌دهنده‌ها پایین‌تر است،



می‌توانیم نتیجه بگیریم که واکنش موردنظر گرماده بوده و  $\Delta H$  آن برابر  $-45 \text{ kJ}$  است. اختلاف محتوای انرژی پیچیده‌ی فعال و فرآورده‌ها همان انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت یا  $E'_a$  می‌باشد. نمودار «انرژی - پیشرفت» این واکنش به صورت مقابل است:

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در واکنش‌های گرماده،  $E'_a$  از  $|\Delta H|$  بزرگ‌تر می‌باشد. بنابراین در واکنش این سؤال،  $E'_a$  از ۴۵ کیلوژول بر مول بزرگ‌تر می‌باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: از آن‌جا که واکنش گرماده است، نمی‌توانیم دربارهی  $E_a$  اظهار نظر کنیم.

گزینه‌ی «۳»: با توجه به رابطه‌ی  $\Delta H = E_a - E'_a$ ، اندازه‌ی اختلاف  $E_a$  و  $E'_a$  برابر  $45 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  می‌باشد.

گزینه‌ی «۴»: در نظریه‌ی برخورد، پیچیده‌ی فعال تعریف نمی‌شود. در این نظریه، انرژی فعال‌سازی، حداقل انرژی لازم برای شروع واکنش است.

(سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۲۰۳-

(امیر قاسمی)

از مقایسه‌ی آزمایش‌های ۱ و ۳ مرتبه واکنش نسبت به A برابر ۱ به دست می‌آید؛ زیرا با ۵ برابر شدن غلظت A و غلظت ثابت B سرعت واکنش نیز ۵ برابر شده است. هم‌چنین از مقایسه‌ی آزمایش‌های ۱ و ۴ مرتبه‌ی واکنش نسبت به B برابر ۲ به دست می‌آوریم؛ زیرا با ۲ برابر شدن غلظت B و غلظت ثابت A سرعت واکنش ۴ برابر شده است. پس رابطه‌ی سرعت این واکنش به صورت

$$R = k[A][B]^2$$

روبرو است:



بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: با توجه به مرتبه‌های مواد موجود در واکنش، تأثیر تغییرات غلظت B از A بر سرعت واکنش بیش‌تر است.  
گزینه ۲: از آن‌جا که مرتبه‌ها با ضرایب استوکیومتری یکسان نیستند، پس واکنش بنیادی نیست و با نظریه‌ی برخورد توجیه نمی‌شود.  
گزینه ۳: با کاهش غلظت‌های A و B به ترتیب به میزان ۸۰٪ و ۴۰٪، مقدار باقی‌مانده‌ی آن‌ها به ترتیب برابر ۲۰٪ و ۶۰٪ مقدار اولیه خواهد بود، پس قانون سرعت به این صورت خواهد شد:

$$R_0 = k[A][B]^2 \Rightarrow R_1 = k[0.6A][0.2B]^2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_0} = 0.24$$

گزینه ۴: مرتبه‌ی واکنش برابر ۳ است که با جای‌گذاری، یکای ثابت سرعت به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$s^{-1} \cdot (مرتبه‌ی کلی)^{-1} = (mol \cdot L^{-1})^{-1} = (mol \cdot L^{-1})^{-(1-3)} = (mol \cdot L^{-1})^{-2} = mol^{-2} \cdot L^2 \cdot s^{-1}$$

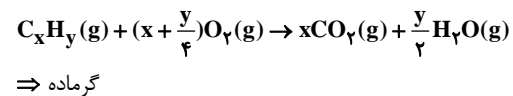
در صورتی که یکای ذکرشده در صورت سؤال به صورت  $mol^2 \cdot L^{-2} \cdot s^{-1}$  است. (سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴)

۲۰۴-

(بابک مهب) عبارت‌های ب و پ روش‌های حذف گاز گوگرد دی‌اکسید حاصل از سوختن بیش‌تر سوخت‌های فسیلی می‌باشند. (سینتیک شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌ی ۲۳)

۲۰۵-

(پ) درست و عبارت‌های (الف)، (ب) و (ت) نادرست هستند. واکنش‌های رخ داده در مبدل‌های کاتالیستی به‌منظور حذف آلاینده‌ها به‌صورت زیر است:  
 $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$   
(در دمای  $750^\circ C$  روی می‌دهد) گرماده  
 $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$  گرماده



بررسی عبارات الف و ت: نماد فلز رودیم، Rh است و مبدل‌های کاتالیستی توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین، پالادیم و رودیم پوشانده شده است و قطعاتی هستند که نزدیک موتور خودرو نصب می‌شوند.

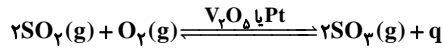


(سینتیک شیمیایی) (شیمی ۳، صفحه‌ی ۶) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۲۲، ۲۵ و ۲۶)

۲۰۶-

(روح‌الله علیزاده)

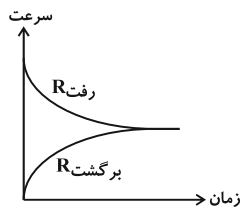
با توجه به واکنش نمادی زیر به بررسی تمام گزینه‌ها می‌پردازیم:



گزینه ۱: این واکنش که در مجاورت کاتالیزگر پلاتین یا وانادیم (V) اکسید انجام می‌شود، مرحله‌ی مهمی در فرایند صنعتی تولید سولفوریک اسید است.

گزینه ۲: در واکنش‌های تعادلی، سرعت واکنش رفت با سرعت واکنش برگشت برابر است. برای مقایسه‌ی سرعت مصرف واکنش‌دهنده‌ها و سرعت تولید فراورده‌ها باید به ضریب استوکیومتری آن‌ها توجه نمود.

گزینه ۳: نمودار سرعت - زمان این واکنش اگر با واکنش‌دهنده‌ها آغاز شود به صورت زیر است:



زیرا سرعت واکنش رفت در ابتدا بیش‌تر از واکنش برگشت است.

گزینه ۴: این واکنش گرماده است و با کاهش آنتروپی همراه است.

(تعادل شیمیایی) (شیمی ۳، صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

(شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۶ تا ۹ و ۳۲)

۲۰۷-

(حامد پویان‌نظر)

۱) سرعت تبخیر آب در این فرایند ثابت است؛ زیرا آب به‌صورت مایع می‌باشد و غلظت آن ثابت است.

۲) تعادل  $H_2O(l) \rightleftharpoons H_2O(g)$  از نوع فیزیکی است.

۵) برای برقراری تعادل، سامانه باید بسته باشد.



(تعادل شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۲۰۸-

(حسن عیسی‌زاده)

پس از محاسبه‌ی تعداد مول‌های اوزون اولیه، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم که با توجه به آن و با استفاده از نسبت تعداد مول‌های  $O_3$  و  $O_2$ ، مقدار x را به‌دست آوریم.

$$? mol O_3 = \frac{48 \cdot g}{48 \frac{g}{mol}} = 1 \cdot mol O_3$$

	$O_3$	$O_2$	$10 - 2x = 2 \Rightarrow x = 1 / 25 mol$
مول اولیه	$1 \cdot mol$	۰	
تغییر مول	$-2x$	$+3x$	
مول تعادلی	$10 - 2x$	$3x$	

$$[O_2] = \frac{3 \times 1 / 25 mol}{1 / 25 L} = 3 mol \cdot L^{-1}$$



(مسعود بیغفری)

-۲۱۱

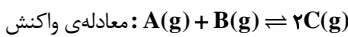
اگر به شکل‌ها با دقت نگاه کنید، متوجه می‌شوید که پس از شکل شماره‌ی (۳)، تعداد ذرات موجود در ظرف تغییر نکرده است، بنابراین در شکل شماره‌ی (۳)، تعادل برقرار شده و از این لحظه، دیگر غلظت‌ها تغییر نمی‌کند. اکنون باید با استفاده از تغییر غلظت‌ها از آغاز واکنش تا لحظه‌ی تعادل، معادله‌ی واکنش را بنویسیم. حجم ظرف برابر یک لیتر است، پس غلظت مولی هر ماده با تعداد مول آن برابر می‌باشد.

$$\Delta[A] = (2 \times 0/1) - (5 \times 0/1) = -0/3 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Delta[B] = (1 \times 0/1) - (4 \times 0/1) = -0/3 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Delta[C] = (6 \times 0/1) - (0) = +0/6 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{A: } \frac{0/3}{0/3} = 1 \\ \text{B: } \frac{0/3}{0/3} = 1 \\ \text{C: } \frac{0/6}{0/3} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{تقسیم بر} \\ \text{تغییر غلظت کوچکتر} \end{array}$$



اکنون باید برای محاسبه‌ی مقدار ثابت تعادل، غلظت مواد در شکل (۳) را در عبارت ثابت تعادل قرار دهیم.

$$K = \frac{[C]^2}{[A][B]} = \frac{(0/6)^2}{(0/3)(0/3)} = 18$$

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

(عبدالرشید یلمه)

-۲۱۲

با افزایش فشار طبق اصل لوشاتلیه تعادل در جهت مول‌های گازی کم‌تر (درجهت رفت) جابه‌جا می‌شود. ضمن این که با افزایش فشار سرعت واکنش‌های رفت و برگشت (در واکنش‌های گازی) افزایش می‌یابد، اما افزایش سرعت واکنش رفت از افزایش سرعت واکنش برگشت بیشتر است.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴ و ۳۹)

(معمد عظیمیان زواره)

-۲۱۳

$$K_1 = \frac{[N_2O_4]}{[NO_2]^2} = \frac{(0/3)}{(0/4)^2} = 3/75 \text{ L.mol}^{-1} \quad (1)$$

$$K_2 = \frac{[NO_2]^2}{[N_2O_4]} \simeq 0/267 \text{ mol.L}^{-1}$$

(۲) با افزایش دما و با جابه‌جایی تعادل به سمت چپ، شدت رنگ قهوه‌ای افزایش می‌یابد.

(۳) با توجه به غلظت‌های تعادلی } که برای  $NO_2$  برابر  $0/2$  می‌باشد  
که برای  $N_2O_4$  برابر  $0/15$  می‌باشد

$$\leftarrow \text{غلظت } NO_2 \text{ برابر غلظت } N_2O_4 \text{ است.} \quad \frac{4}{3}$$

$$[O_3] = \frac{10 - (2 \times 1/25) \text{ mol}}{1/25 \text{ L}} = \frac{7/25 \text{ mol}}{1/25 \text{ L}} = 7 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K = \frac{[O_2]^3}{[O_3]^2} = \frac{(3)^3}{(6)^2} = \frac{27}{36} = 0/75 \text{ mol.L}^{-1}$$

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

-۲۰۹

(نیما حسن‌زاده)

موارد «الف» و «ت» صحیح می‌باشند. تشریح موارد:

الف- در دمای  $25^\circ\text{C}$  مقدار عددی ثابت تعادل بسیار کوچک است و گویی در این دما واکنش رفت انجام نمی‌شود. (درست)

ب- این تعادل یک تعادل ناهمگن  $3$  افزای است. (نادرست)

پ- سرعت واکنش رفت به غلظت واکنش‌دهنده بستگی دارد، درحالی‌که غلظت مواد جامد تغییر نمی‌کند. پس افزودن و یا کاستن از مقدار کلسیم کربنات، هیچ تأثیری بر روی سرعت واکنش ندارد. (نادرست)

ت- تنها ماده‌ی شرکت‌کننده در عبارت ثابت تعادل،  $CO_2(g)$  می‌باشد. بنابراین یکای ثابت تعادل آن  $\text{mol.L}^{-1}$  است. (درست)

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

-۲۱۰

(مرتضی هوش‌کیش)

مقدار مول آمونیاک و هیدروژن را به دست می‌آوریم:

$$? \text{ mol NH}_3 = 0/5 \text{ g NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 \text{ g NH}_3} = 0/29 \text{ mol NH}_3$$

$$? \text{ mol H}_2 = 0/06 \text{ g H}_2 \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{2 \text{ g H}_2} = 0/03 \text{ mol H}_2$$



مول اولیه:  $0/29 \text{ mol}$        $0$        $0$

مول تعادلی:  $0/03 - 2x$        $3x$        $x$

$$\Rightarrow 3x = 0/29 \text{ mol H}_2 \Rightarrow x = 0/097 \text{ mol}$$

$$\text{NH}_3 \text{ مول تعادلی} = 0/03 - 2x \xrightarrow{x=0/097} = 0/01 \text{ mol NH}_3$$

$$\xrightarrow{V=2\text{L}} [\text{NH}_3] = 5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{H}_2 \text{ مول تعادلی} = 3x \xrightarrow{x=0/097} = 0/29 \text{ mol H}_2$$

$$\xrightarrow{V=2\text{L}} [\text{H}_2] = 15 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{N}_2 \text{ مول تعادلی} = x \xrightarrow{x=0/097} = 0/097 \text{ mol N}_2$$

$$\xrightarrow{V=2\text{L}} [\text{N}_2] = 5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K = \frac{[\text{H}_2]^3 \times [\text{N}_2]}{[\text{NH}_3]^2} = \frac{(15 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1})^3 \times (5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1})}{(5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1})^2} = 6/75 \times 10^{-4} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$$

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)



۴) درست است که تعادل به سمت راست جابه‌جا می‌شود، اما با افزایش فشار غلظت گونه‌ها افزایش می‌یابد، اما افزایش غلظت  $[N_2O_4]$  بیش‌تر از افزایش غلظت  $[NO_2]$  می‌باشد.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۵، ۴۹ تا ۵۱)

۲۱۴-

(مسعود بیغری)

تعادل داده شده گرماگیر است، از این‌رو با کاهش دما، تعادل به سمت چپ جابه‌جا شده و مقدار  $K$  کاهش می‌یابد. بنابراین نمودار گزینه‌های «۱» و «۲» که در آن‌ها به ترتیب مقدار  $K$  تغییر نکرده و بزرگ‌تر شده، نادرست هستند. در تعادل اولیه، خارج قسمت واکنش ( $Q$ ) با  $K_1$  برابر می‌باشد، پس از کاهش دما، مقدار  $K$  تغییر کرده و ثابت تعادل جدید ( $K_2$ ) از  $K_1$  کوچک‌تر خواهد بود. در نتیجه، در نخستین لحظه‌ی کاهش دما،  $Q > K_2$  شده و تعادل به سمت چپ جابه‌جا می‌شود تا به تدریج  $Q$  کوچک‌تر شود و در نهایت با مقدار  $K_2$  برابر شده و به تعادل جدید برسیم.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

۲۱۵-

(معمد عقیمیان زواره)

۱) با توجه به واکنش و یکای ثابت تعادل، یک تعادل ناهمگن است.  
۲) مقدار عددی  $K$  بسیار بزرگ است و نشان‌دهنده‌ی ناچیز بودن مول‌های  $A$  و  $B$  یا بسیار بیش‌تر بودن مول‌های  $C$  در پایان واکنش می‌باشد.  
۳) با توجه به یکای ثابت تعادل مشخص می‌شود که  $B$  یا جامد است یا مایع خالص و وارد کردن آن به مخلوط تعادل باعث جابه‌جایی تعادل نمی‌شود.  
۴) فشار بر ثابت تعادل اثری ندارد. اما با توجه به یکای ثابت تعادل، تعداد مول‌های گازی در دو طرف تعادل یکسان نیست و با تغییر فشار تعداد مول‌های  $B$  تغییر می‌کند.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۳۵، ۳۷، ۴۱، ۴۲ تا ۴۹)

۲۱۶-

(مسین سلیمی)

مورد اول: (نادرست)  
 $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g) + q$   
این واکنش گرماگیر است. بالارفتن دمای ظرف طبق اصل لوشاتلیه واکنش را به سمت برگشت بیش‌تر پیشرفت می‌دهد و ثابت تعادل کوچک‌تر می‌شود.  
مورد دوم: (نادرست)

- خارج کردن مقداری گاز اکسیژن، موجب پیشرفت واکنش برگشت می‌شود.  
- افزودن مقداری گاز  $SO_3$  موجب پیشرفت واکنش برگشت می‌شود.  
با این ۲ تغییر، واکنش برگشت بیش‌تر انجام می‌شود ولی به دلیل ثابت بودن دما، ثابت تعادل تغییری نمی‌کند.

مورد سوم: (درست): در صورت کاهش حجم ظرف، فشار ظرف افزایش می‌یابد و واکنش به سمتی بیش‌تر پیش می‌رود که از فشار ظرف بکاهد (مول گازی کم‌تر). از مقدار  $SO_2$  و  $O_2$  کاسته می‌شود و به مقدار  $SO_3$  افزوده می‌شود.

توجه: غلظت تمامی گونه‌ها بیش‌تر از حالت نخست می‌شود.

مورد چهارم (درست): در صورت کاهش دمای ظرف سرعت هر دو واکنش رفت و برگشت کم می‌شود. در صورت کاهش دما، واکنش رفت، بیش‌تر انجام می‌شود و تعداد مول گازی درون ظرف کاهش می‌یابد  $\leftarrow$  فشار وارد بر ظرف کم می‌شود.  
(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۴۶ تا ۵۲)

۲۱۷-

(معمد بهار فولاری)

با افزایش دما سرعت واکنش‌های رفت و برگشت افزایش یافته و تعادل سریع‌تر برقرار می‌شود. بررسی سایر گزینه‌ها:  
گزینه‌ی «۱»: در تعادل‌های گرماگیر با افزایش دما، واکنش در جهت رفت پیش‌روی می‌کند و ثابت تعادل افزایش می‌یابد.  
گزینه‌ی «۲»: با افزایش دما سرعت واکنش رفت و برگشت هر دو افزایش می‌یابد.  
گزینه‌ی «۴»: در تعادل‌های گرماگیر با افزایش دما، واکنش در جهت برگشت پیش‌روی می‌کند و مقدار  $K$  کوچک می‌شود.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

۲۱۸-

(علی فرزاد تبار)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:  
 $2Cl_2 + 2H_2O \rightleftharpoons 4HCl + O_2$   
با توجه به این که حجم ظرف اول برابر  $0.5$  لیتر است، خواهیم داشت:

$$Q = \frac{\left(\frac{1}{0.5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{0.5}\right)}{\left(\frac{0.5}{0.5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{0.5}\right)^2} = 16$$

واکنش در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.  $Q > K \Rightarrow$   
پس از برقراری تعادل اگر مخلوط واکنش را به ظرف بزرگ‌تر (چهار برابر ظرف اول) انتقال دهیم واکنش به سمت تولید مول گازی بیش‌تر یعنی به سمت فرآورده‌ها پیش می‌رود.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶، ۴۹ و ۵۰)

۲۱۹-

(فرزاد نیقی کرمی)

نیترژن یکی از عنصرهای اصلی سازنده‌ی پروتئین‌ها، نوکلئیک‌اسیدها، ویتامین‌ها و هورمون‌ها می‌باشد اما اصلی‌ترین عنصر سازنده در همه‌ی ترکیب‌های آلی، کربن می‌باشد.  
(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۲۲۰-

(اکبر ابراهیم‌نجاج)

مورد اول نادرست است: درصد مولی آمونیاک در مخلوط واکنش به  $28\%$  می‌رسد، نه بازده درصدی.  
مورد دوم نادرست است: یکای ثابت تعادل آن  $mol^{-2} \cdot L^2$  است ولی در مورد تجزیه‌ی  $N_2O_5$ ، یکا  $mol^3 \cdot L^{-3}$  است.  
مورد سوم نادرست است: از نظر سینتیک مساعد نیست، به‌خاطر همین دما را بالا برده و از کاتالیزگر استفاده می‌کنند.  
مورد چهارم درست است.

(تعارف شیمیایی) (شیمی پیش‌دانشگاهی، صفحه‌های ۹، ۳۰، ۳۸، ۳۹ و ۵۴ تا ۵۶)